異なる階数を持つ微分方程式の関係性を表す漸化式の発見

岩田　順敬　（大阪経済法科大学経営学部　准教授）

ハイライト

・ある関係性を表す法則とまた別の関係性を表す法則との間に関係が存在し得ることを漸化式の形で定量的に示した。

概要

物体の運動がニュートン方程式（運動方程式）によって記述されるように、自然法則をはじめとした多くの法則は微分方程式によって記述される。これまで微分方程式の研究という意味では、方程式を解いて、可能であれば解を数式で表現し性質を調べるという主旨での研究が多くなされてきた。一方で支配法則そのものを表す微分方程式どうしの関係性を調べるような研究はこれまでにほとんど行われてこなかった。本研究では、異なる階数を持つ微分方程式間の関係性を表す漸化式を新たに発見した。これは支配法則どうしに関係性が存在し得るのかどうか、また関係があるとすればそれはどのようなものかという問いに答える研究成果である。結果は、学術誌の出版において世界最大規模のエルゼビア（Elsevier B.V.）が出版する学術誌として、数学・応用数学分野において世界トップランク誌の一つに位置付けられている Chaos Solitons & Fractals: X 誌（SJR：Q1，インパクト・ファクター：5.3）から出版された。

発表内容

(1) これまでの研究でわかっていたこと

変数を t にとれば、ある関数を 1 回微分することは 1 階微分作用素∂_tによって表される。2 回微分することは 2 階微分作用素∂_t^2によって表される。このように微分の回数を増やして n 階微分作用素∂_t^nを定義することができる。他方 n 階微分作用素を含む方程式を n 階微分方程式と呼ぶ。これまでの微分方程式に関する研究については 1 階微分方程式や 2 階微分方程式に関する研究がほとんどで、3 階以上の微分作用素を含む微分方程式（高階微分方程式）については、いくつかの限られた例を除いて、世界的に見てもほとんど体系的に研究されてこなかった。さらには、異なる階数の微分方程式の間になんらかの関係があるのかどうかということについては、そのような関係そのものが存在するのかどうかということも含めて、ほとんど理解されてこなかった。

(2)この研究が示したこと

本研究では、異なる階数を持つ微分方程式間の関係性を表す漸化式を発見し、その正当性を数学的に証明した。提案された漸化式は、無限次元または有限次元のバナッハ空間上で成立する方程式としてあらわされる（図参照）。この方程式は、n=1 ととれば、リッカチの微

分方程式として知られる非線形常微分方程式になる。また得られた式を数学的な変換として見直せば、ソリトンを表す非線形偏微分方程式として知られているコルトベーグ・ドフース方程式（KdV 方程式）の解を変形コルトベーグ・ドフース方程式（mKdV 方程式）の解へと変換するミウラ変換（Miura 変換）や、熱方程式の解をバーガース方程式の解へと変換するコール・ホップ変換(Cole-Hopf 変換)を内包した一般的な形式になっている。その意味では、ソリトン理論をはじめとした非線形数理の基盤に関する知見を得たことにもなる。

(3)この研究で得られた結果および知見

本研究によって、一般的にバナッハ空間上で成立する簡明な漸化式

$$A_n(t) = (\partial_t + A_1(t))A_{n-1}(t)$$

が得られた。ここで$A_n(t)$は非有界作用素を含んだバナッハ空間上の作用素を表している（n= 2, 3, 4 …)。

漸化式としての性質から、n=1 に対応する 1 階微分方程式からはじめて n = 2, 3, 4 …とおいて順次適用していけば、同じ特徴を持つ高階微分方程式を逐次的に見出すことができる。これは、微分階数によらない普遍性が存在することを見つけたことに他ならない。

(4)期待される波及結果と今後の展開

本研究で発見された漸化式は、数と数の間の関係性を表す漸化式（例えば、等比数列を表す漸化式など）よりもさらに奥が深いものになっている。作用素と作用素の間、生成素と生成素の間の関係、言い換えれば、法則と法則の間の関係を表している。これにより微分方程式を全く新しい観点から分類し体系化できるような原理・原則を見つけたことになる。結果として、高階微分方程式を理解していく上での新たな切り口がもたらされた。さらには、異なる階数の微分方程式の間に系統的関係性が存在することが明らかされたことで、非線形性や高階微分を含んだ複雑系を体系的に理解していく一般論を構築できる可能性が見えてきたことになる。

発表雑誌情報

出版社：エルゼビア　Elsevier B.V.
論文誌：カオス・ソリトンズ・アンド・フラクタルズ　Chaos Solitons & Fractals: X
論文名：Recurrence formula for some higher order evolution equations
著者：Yoritaka Iwata
掲載 URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590054424000162

研究内容に関する問い合わせ先
大阪経済法科大学　経営学部
准教授：岩田　順敬（いわた よりたか）

TEL：072-941-8211（代表）
E-mail：y-iwata[at]s.keiho-u.ac.jp
※[at]を@に変更してください。

報道に関する問い合わせ先
大阪経済法科大学　庶務課
TEL：072-941-8211（代表）
E-mail：syomu[at] keiho-u.ac.jp
※[at]を@に変更してください。

$$A_n(t) = (\partial_t + A_1(t))\, A_{n-1}(t)$$

$$\partial_t \psi(t) = A_1(t)\psi(t)$$

$$\partial_t^2 \psi(t) = A_2(t)\psi(t)$$

$$\vdots$$

$$\partial_t^n \psi(t) = A_n(t)\psi(t)$$

図：n-1 階の微分作用作用素を n 階微分作用素の関係性を表す漸化式と、それによって関連付けられる任意の階数をもつ微分方程式系